Intensivos 2018

MA1112 - Matemáticas II

Solución Parcial 2 (30 %)

Turno 2-3

Pregunta 1

Calcule los siguientes límites:

a) (4 ptos.) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{e^{x^2}}\right)^{e^{-2x^2}}$

b) (2 ptos.) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\cosh x}$

Solución

a) Haciendo la sustitución ingenua (S.I.) obtenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^{e^{-2x^2}} = [0^0]$$

El cual es una indeterminación del tipo exponencial. Así que aplicamos logaritmo natural y exponencial antes de tomar el límite de modo que queda:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^{e^{-2x^2}}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(e^{-2x^2}\ln\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\ln\left(e^{-x^2}\right)}{e^{2x^2}}\right]}$$

Donde la última igualdad es consecuencia de la continuidad de la función exponencial. Ahora, trabajaremos con el límite, cuya sustitución ingenua conlleva a una indeterminación del tipo $[\frac{\infty}{\infty}]$. Así que aplicamos la regla de L'Hopital, obteniendo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln\left(e^{-x^2}\right)}{e^{2x^2}}\right] &= \lim\left[\frac{\frac{-2x\cancel{e^{-x^2}}}{\cancel{e^{-x^2}}}}{e^{2x^2}(4x)}\right]\\
&= \lim\left[\frac{-\cancel{2x}}{\cancel{4x}e^{2x^2}}\right]\\
&= \lim\left[\frac{-1}{2e^{2x^2}}\right] \quad \text{(Haciendo S.I.)}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Sustituyendo arriba, obtenemos finalmente que

$$
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^{e^{-2x^2}} = e^0 = \boxed{1}
$$

b) Haciendo S.I. obtenemos:

$$
\lim_{x\to-\infty}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\cosh x} = \left(\frac{1}{(-\infty)^{1/3}}\right)^{\cosh(-\infty)} = 0^{\infty} = \boxed{0}
$$

Pregunta 2

(8 ptos. c/u)Resuelva las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \pi^x \cos x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{(8+2e^x-e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$

Solución

a) Aplicamos integración por partes y hacemos:

$$
\begin{array}{rcl}
u = \pi^x & \Rightarrow & du = \pi^x \ln \pi dx\\
v = \operatorname{sen} x & \Leftarrow & dv = \cos x dx
\end{array}
$$

De modo que la integral queda:

$$
\int \pi^x \cos x \,\mathrm{d}x = \pi^x \operatorname{sen} x - \ln \pi \int \pi^x \operatorname{sen} x \mathrm{d}x
$$

Aplicamos integración por partes de nuevo haciendo:

$$\begin{array}{rcl} u = \pi^x & \Rightarrow & du = \pi^x \ln \pi dx \\ v = -\cos x & \Leftarrow & dv = \operatorname{sen} x dx \end{array}$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned} \int \pi^x \cos x \, \mathrm{d}x &= \pi^x \operatorname{sen} x - \ln \pi \int \pi^x \operatorname{sen} x \mathrm{d}x \\ &= \pi^x \operatorname{sen} x - \ln \pi \left(-\pi^x \cos x + \ln \pi \int \pi^x \cos x \mathrm{d}x \right) \\ &= \pi^x \operatorname{sen} x + \ln \pi \ \pi^x \cos x - \ln^2 \pi \int \pi^x \cos x \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Es una integral cíclica, por lo que pasamos la expresión $-\ln^2 \pi \int \pi^x \cos x \mathrm{d}x$ sumando al otro lado de la igualdad. Obteniendo:

$$\begin{aligned} \int \pi^x \cos x \mathrm{d}x + \ln^2 \pi \int \pi^x \cos x \mathrm{d}x &= \pi^x \operatorname{sen} x + \ln \pi \ \pi^x \cos x \\ (1 + \ln^2 \pi) \int \pi^x \cos x \mathrm{d}x &= \pi^x \operatorname{sen} x + \ln \pi \ \pi^x \cos x \\ \int \pi^x \cos x \mathrm{d}x &= \frac{1}{1 + \ln^2 \pi} (\pi^x \operatorname{sen} x + \ln \pi \ \pi^x \cos x) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \pi^x \cos x \mathrm{d}x = \boxed{\frac{\pi^x (\operatorname{sen} x + \ln \pi \cos x)}{1 + \ln^2 \pi} + C}$$

b) Reescribimos la integral:

$$\int \frac{e^{2x}}{(8 + 2e^x - e^{2x})^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x = \int \frac{e^x e^x \mathrm{d}x}{(8 + 2(e^x) - (e^x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Hacemos el cambio $\boxed{u = e^x}$, entonces $\boxed{du = e^x dx}$.
Sustituyendo en la integral, obtenemos:

$$\int \frac{u}{(8 + 2u - u^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u = \int \frac{u}{(9 - 1 + 2u - u^2))^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u = \int \frac{u}{(9 - (u-1)^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u = \int \frac{u}{(3^2 - (u-1)^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u$$

Hacemos el cambio trigonométrico $\boxed{u - 1 = 3 \operatorname{sen} \theta}$ y así $\boxed{u = 3 \operatorname{sen} \theta + 1}$ y $\boxed{du = 3 \cos \theta d\theta}$. Sustituimos en la integral y queda:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{u}{(3^2-(u-1)^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{(3\,\mathrm{sen}\,\theta+1)}{(3^2-3^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta)^{3/2}}(3\cos\theta\mathrm{d}\theta) \\
&= \int \frac{(3\,\mathrm{sen}\,\theta+1)}{(3^{\cancel{2}})^{3/\cancel{2}}(1-\mathrm{sen}^2\,\theta)^{3/2}}(3\cos\theta\mathrm{d}\theta) \\
&= \int \frac{(3\,\mathrm{sen}\,\theta+1)}{(3^{\cancel{3}})(\cos^{\cancel{2}}\theta)^{3/\cancel{2}}}(\cancel{3}\cos\theta\mathrm{d}\theta) \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{(3\,\mathrm{sen}\,\theta+1)}{(\cos^{\cancel{3}}\theta)}(\cancel{\cos\theta}\mathrm{d}\theta) \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{(3\,\mathrm{sen}\,\theta+1)}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

Dividimos la integral y tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{9}\int \frac{(3\,\mathrm{sen}\,\theta+1)}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta + \frac{1}{9}\int \frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\ \mathrm{d}\theta + \frac{1}{9}\int \sec^2\theta\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\sec\theta + \frac{1}{9}\,\mathrm{tg}\,\theta + C
\end{aligned}
$$

Luego, si $u-1 = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$, entonces $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{CO}{h} = \frac{u-1}{3}$. De aquí que $\sec\theta = \frac{h}{CA} = \frac{3}{\sqrt{9-(u-1)^2}}$ y $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{CO}{CA} = \frac{u-1}{\sqrt{9-(u-1)^2}}$.

Sustituyendo arriba y devolviendo los cambios obtenemos finalmente

$$
\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x}}{(8+2e^{x}-e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\sec\theta + \frac{1}{9}\operatorname{tg}\theta + C \\
&= \frac{1}{9}(3\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) + C \\
&= \frac{1}{9}\left(3\frac{3}{\sqrt{9-(u-1)^2}} + \frac{u-1}{\sqrt{9-(u-1)^2}}\right) + C \\
&= \frac{u+8}{9\sqrt{8+2u-u^2}} + C \\
&= \boxed{\frac{e^{x}+8}{9\sqrt{8+2e^{x}-e^{2x}}} + C}
\end{aligned}
$$

Pregunta 3

(4 ptos.) Resuelva $\displaystyle\int \frac{\csc^6 x}{(\csc^2 x - 1)^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}x$

Solución

Reescribimos la integral:

$$
\int \frac{\csc^6 x}{(\csc^2 x-1)^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}x = \int \frac{(\csc^2 x)^2 \csc^2 x}{(\operatorname{ctg}^{\cancel{2}} x)^{\frac{1}{\cancel{6}}}}\mathrm{d}x = \int \frac{(\operatorname{ctg}^2 x+1)^2 \csc^2 x}{(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x
$$

Hacemos el cambio $\boxed{u = \operatorname{ctg} x}$, y así $\boxed{-du = \csc^2 x dx}$. La integral queda:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{(\operatorname{ctg}^2 x+1)^2 \csc^2 x}{(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x &= \int \frac{(u^2+1)^2}{u^{1/3}}(-\mathrm{d}u) \\
&= -\int \frac{(u^4+2u^2+1)}{u^{1/3}}\mathrm{d}u \\
&= -\int (u^{11/3} + 2u^{5/3} + u^{-1/3})\mathrm{d}u \\
&= -\left(\frac{3}{14}u^{14/3} + \cancel{2}\frac{3}{\cancel{8}}u^{8/3} + \frac{3}{2}u^{2/3}\right) + C \\
&= -\frac{3}{14}u^{14/3} - \frac{3}{4}u^{8/3} - \frac{3}{2}u^{2/3} + C
\end{aligned}
$$

Finalmente, devolviendo el cambio tenemos que

$$\int \frac{\csc^6 x}{(\csc^2 x - 1)^{\frac{1}{6}}} \mathrm{d}x = \boxed{-3\left(\frac{(\mathrm{ctg}x)^{14/3}}{14} + \frac{(\mathrm{ctg}x)^{8/3}}{4} + \frac{(\mathrm{ctg}x)^{2/3}}{2}\right) + C}$$

Pregunta 4

Derive la función

$$f(x) = \operatorname{arcsenh}(\operatorname{tg} x) + (\cosh x)^{\ln(\operatorname{tg} x - x)} - \log_8 e^{3x}$$

Solución

Sean $y = f(x)$, $y_1 = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{tg} x)$, $y_2 = (\cosh x)^{\ln(\operatorname{tg} x - x)}$ y $y_3 = \log_8 e^{3x}$. Entonces, buscamos $f'(x) = y' = (y_1 + y_2 - y_3)' = y_1' + y_2' - y_3'$.

Cabe destacar que para derivar $f(x)$ es necesario que, en y_2, $\operatorname{tg} x - x$ sea positivo, y que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, por la presencia de $\operatorname{tg} x$ en y_1 y en y_2. Ahora, teniendo este dominio en cuenta calculamos cada derivada por separado y luego unimos los resultados.

$$y_1' = (\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{tg} x))' = \frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} x)^2}}(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 x}} \sec^2 x = |\cos x| \sec^2 x$$

$$y_3' = (\log_8 e^{3x})' = \frac{1}{\ln 8 \; e^{3x}}(e^{3x})' = \frac{1}{\cancel{e^{3x}} \ln(2^3)} 3\cancel{e^{3x}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3} \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

Para y_2' usaremos derivación logarítmica.

$$\begin{aligned}
y_2 &= (\cosh x)^{\ln(\operatorname{tg} x - x)} \\
\ln(y_2) &= \ln\left((\cosh x)^{\ln(\operatorname{tg} x - x)}\right) \\
\ln(y_2) &= \ln(\operatorname{tg} x - x)\ln(\cosh x) \quad \text{(Derivamos implícitamente)} \\
\frac{1}{y_2} y_2' &= \frac{1}{tgx - x}(\sec^2 x - 1)\ln(\cosh x) + \frac{1}{\cosh x}(\operatorname{senh} x)\ln(\operatorname{tg} x - x) \\
y_2' &= y_2 \left[\frac{\operatorname{tg}^2 x \, \ln(\cosh x)}{tgx - x} + \operatorname{tgh} x \, \ln(\operatorname{tg} x - x)\right] \\
y_2' &= (\cosh x)^{\ln(\operatorname{tg} x - x)} \left[\frac{\operatorname{tg}^2 x \, \ln(\cosh x)}{tgx - x} + \operatorname{tgh} x \, \ln(\operatorname{tg} x - x)\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo todo esto arriba, obtenemos finalmente que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= y_1' + y_2' - y_3' \\
&= \boxed{|\cos x| \sec^2 x + (\cosh x)^{\ln(\operatorname{tg} x - x)} \left[\frac{\operatorname{tg}^2 x \, \ln(\cosh x)}{tgx - x} + \operatorname{tgh} x \, \ln(\operatorname{tg} x - x) \right] - \frac{1}{\ln 2}}
\end{aligned}
$$

(Siempre que $\operatorname{tg} x - x > 0$, y $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$)